TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN
Fakultät Wirtschaftswissenschaften

Dresdner Beiträge zu
Quantitativen Verfahren

Nr. 63/16

Chance (*odd*) versus Wahrscheinlichkeit (*probability*)

von

Stefan Huschens

Herausgeber:
Die Professoren der
Fachgruppe Quantitative Verfahren

ISSN 0945-4802

Chance (*odd*) versus Wahrscheinlichkeit (*probability*)

Stefan Huschens*

Fassung vom 16. August 2016

Zusammenfassung

Der Zusammenhang zwischen den Begriffen ‚Chance' (*odd*) und ‚Wahrscheinlichkeit'(*probability*) und die Anwendung des Chancenverhältnisses (*odds ratio*) im Bereich der Biometrie und bei der logistischen Regression werden erläutert. Es wird auf mögliche Fehlinterpretationen der Begriffe Chance und Chancenverhältnis hingewiesen.

Schlüsselwörter: Chance, Wahrscheinlichkeit, Chancenverhältnis, logistische Regression, *odd*, *odds ratio*, Odds-Ratio, Odds-Verhältnis, Quotenverhältnis

1 Chance

Definition 1.1 Wenn $p < 1$ die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bezeichnet, dann ist das Verhältnis

$$c = \frac{p}{1-p} \tag{1}$$

die **Chance** (*odd*) für das Eintreten dieses Ereignisses.

Bemerkung 1.2 (Chance versus Wahrscheinlichkeit)

1. Beispielsweise hat beim Wurf eines fairen Würfels das Ereignis, eine Eins zu würfeln, die Wahrscheinlichkeit $p = 1/6$, während die „Chance für eine Eins" den Wert $1/5$ hat oder „eins zu fünf" ist. Die „Chance gegen eine Eins" hat entsprechend den Wert $5/1$ oder ist „fünf zu eins". Während also die Wahrscheinlichkeit eine Eins zu würfeln durch das Verhältnis der „Anzahl der günstigen Fälle" zur „Anzahl der möglichen Fälle" gegeben ist, nämlich $1/6$, ist die entsprechende Chance durch das Verhältnis der „Anzahl der günstigen Fälle" zur „Anzahl der ungünstigen Fälle", nämlich $1/5$, gegeben.

2. Umgangssprachlich wird „Chance" häufig im Plural in Verbindung mit dem Verb „stehen" verwendet: „Die Chancen stehen 1 zu 5" (‚*The odds are 1:5*' oder ‚*The odds are 1/5*'); „Die Chancen stehen 1 zu 1 (oder 50 zu 50)" (‚*The odds are fifty-fifty*').

*Bitte senden Sie Hinweise auf Fehler an `stefan.huschens@tu-dresden.de`. Unter `https://www.stefan-huschens.de/statistik/statistische-miszellen/` können Sie sich informieren, ob es eine aktuellere Fassung gibt, und diese gegebenenfalls herunterladen.

3. Zu einer gegebenen Wahrscheinlichkeit lässt sich mit Gleichung (1) die zugehörige Chance berechnen. Umgekehrt lässt sich aus einer gegebenen Chance $c \geq 0$ mit der Gleichung
$$p = \frac{c}{1+c}$$
die entsprechende Wahrscheinlichkeit bestimmen.

4. Die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen durch Chancen anzugeben, ist bei Sportwetten üblich, wo man auch von „Wettquotienten“ oder „Wettchancen“ spricht.

5. In der Statistik spielen „Chancen“ bei biometrischen Untersuchungen und bei der Untersuchung kategorialer Merkmale mit Hilfe logistischer Regressionen eine Rolle.

6. Das deutsche Wort „Chance“ im Sinn von „*odd*“ sollte nicht mit *chance* ins Englische rückübersetzt werden, da *chance* in der englischen Sprache nicht eindeutig ist und teils mit der Bedeutung *odds* und teils mit der Bedeutung *probability* verwendet wird.

7. Auch in der deutschen Sprache wird umgangsprachlich häufig Chance mit Wahrscheinlichkeit gleichgesetzt, so dass darauf geachtet werden muss, ob in einem bestimmten Zusammenhang Chance als statistischer Fachterminus im Sinn von *odd* oder umgangssprachlich im Sinn von Wahrscheinlichkeit verwendet wird. Um Missverständnissen vorzubeugen, kann es sinnvoll sein, in deutschsprachigen wissenschaftlichen Abhandlungen den eingedeutschten Begriff „Odd“ als statistischen Fachterminus zu verwenden.

8. Wenn die Wahrscheinlichkeit Werte im Bereich $[0, 1)$ durchläuft, dann durchläuft die zugehörige Chance Werte im Bereich $[0, \infty)$. Die Chance hat für $p = 1/2$ den Wert Eins und übersteigt jeden endlichen Wert, wenn sich p dem Wert Eins nähert, d. h.
$$\lim_{p \to 1} \frac{p}{1-p} = \infty.$$
Das Konzept der Chance lässt sich für $p = 1$ auf konsistente Art erweitern, indem man in diesem Fall für die Chance den Wert ∞ zulässt.

2 Chancenverhältnis

Definition 2.1 Für die Wahrscheinlichkeiten $p^* < 1$ und $p < 1$ von zwei Ereignissen A^* und A mit den zugehörigen Chancen c^* und c ist

$$\frac{c^*}{c} = \frac{\dfrac{p^*}{1-p^*}}{\dfrac{p}{1-p}}$$

das **Chancenverhältnis** (*odds ratio*, auch *odd ratio*) von A^* bezogen auf A.

Bemerkung 2.2 (Chancenverhältnis)

1. Ein Chancenverhältnis wird auch als Odds-Verhältnis, Odds-Ratio oder Quotenverhältnis bezeichnet.

2. Das Chancenverhältnis wird beispielsweise im Bereich der Biometrie verwendet, um die Heilungschance einer Krankheit bei Anwendung einer speziellen Therapie mit der Heilungschance ohne Anwendung dieser Therapie zu vergleichen.

Bemerkung 2.3 (Logistische Regression und Chancenverhältnis)

1. Im Standardmodell der logistischen Regression wird die Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ eines Ereignisses durch eine Linearkombination

$$z = \alpha + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_K x_K \tag{2}$$

von K erklärenden Variablen $x_1, \ldots, x_K$ mit dem nichtlinearen Zusammenhang

$$p = \frac{1}{1 + e^{-z}} \tag{3}$$

erklärt.

2. Aus Gleichung (3) ergibt sich die Chance als

$$c = \frac{p}{1-p} = e^z$$

und die logarithmierte Chance, die in diesem Zusammenhang auch Logit (*logit*, *log odd*) heißt, als

$$\ln(c) = z.$$

3. Eine partielle Erhöhung der k-ten erklärenden Variable x_k um eine Einheit auf $x_k^* = x_k + 1$, bei der die übrigen Variablen des Modells konstant gehalten werden, verändert die Linearkombination z um β_k auf $z^* = z + \beta_k$, verändert e^z um den Faktor e^{β_k} zu $e^{z^*} = e^{\beta_k} e^z$ und damit die Chance $c = p/(1-p)$ zu

$$c^* = \frac{p^*}{1-p^*} = e^{\beta_k} e^z = e^{\beta_k} c.$$

Das Chancenverhältnis dieser Änderung ist daher

$$\frac{c^*}{c} = e^{\beta_k}.$$

Dieser Zusammenhang ermöglicht es, die transformierten Koeffizienten $e^{\beta_1}, \ldots, e^{\beta_K}$ einer logistischen Regressionsgleichung als Chancenverhältnisse zu interpretieren, die sich jeweils bei einer partiellen Erhöhung der k-ten Variable um eine Einheit ergeben. Für eine binäre Variable x_k mit den beiden Werten 0 und 1, verändert sich die Chance – nicht die Wahrscheinlichkeit – beim Übergang von 0 zu 1 um den Faktor e^{β_k}, wenn alle anderen Variablen im Modell konstant gehalten werden. Für eine kontinuierliche Variable x_k, die um eine Einheit erhöht wird, ändert sich die Chance – nicht die Wahrscheinlichkeit – um den Faktor e^{β_k}, wenn alle anderen Variablen im Modell konstant gehalten werden.

3 Fehlinterpretationen

Bemerkung 3.1 (Fehlinterpretation der Chance) Umgangsprachlich werden häufig Chance und Wahrscheinlichkeit nicht unterschieden. Wenn beispielsweise jemand davon spricht, dass die Heilungschance einer Krankheit 80% sei, dann wird dies in der Regel als eine Heilungswahrscheinlichkeit von 80%, d. h. eine Heilung in rund 80 von 100 Fällen, aufgefasst. Bei einer Chance im Sinn von *odd* bedeutet eine Heilungschance von 80:100 aber, dass es in 80 von 180 Fällen zu einer Heilung und in 100 von 180 Fällen nicht zu einer Heilung kommt. Die Heilungswahrscheinlichkeit ist in diesem Fall 80/180 = 44,4% und unterscheidet sich damit erheblich von der Heilungswahrscheinlichkeit 80%.

Bemerkung 3.2 (Fehlinterpretation des Chancenverhältnisses) Bei der Verwendung des Chancenverhältnisses sind gravierende Fehlinterpretationen möglich. Dazu wird folgender Fall betrachtet: Die Heilungswahrscheinlichkeit einer Erkrankung ohne Therapie sei $p = 4\%$ und die Heilungswahrscheinlichkeit mit Anwendung einer speziellen Therapie sei $p^* = 5\%$.

1. Die Therapie verbessert die Heilungswahrscheinlichkeit absolut um $p^* - p = 1\%$ und relativ um $\frac{p^*-p}{p} = 25\%$. Die Therapie wirkt also im Durchschnitt in einem von 100 Fällen.

2. Die Heilungschance ohne Therapie ist

$$c = \frac{p}{1-p} = 4/96 = 0{,}0417,$$

die Heilungschance mit Therapie ist

$$c^* = 5/95 = 0{,}0526,$$

das Chancenverhältnis ist

$$\frac{c^*}{c} = \frac{5/95}{4/96} = 1{,}263.$$

Die Therapie verbessert die Heilungschance absolut um

$$c^* - c = 0{,}0526 - 0{,}0417 = 0{,}0109$$

und relativ um

$$\frac{c^* - c}{c} = \frac{c^*}{c} - 1 = 26{,}3\%.$$

Die relative Verbesserung 26,3% erhält man also, wenn man vom Chancenverhältnis die Zahl Eins subtrahiert.

3. Der Therapieerfolg wird teilweise in der medizinischen Literatur bei der beschriebenen Konstellation – insbesondere in der Arzneimittelwerbung – so wiedergegeben, dass die Therapie, z. B. die Gabe eines bestimmten Medikamentes, „die Heilungschancen um 26,3% verbessert“. Richtig interpretiert ist diese Aussage nicht falsch. Bei einer Verwechselung von Heilungschance mit Heilungswahrscheinlichkeit und von relativer Verbesserung mit absoluter Verbesserung entsteht die gravierende Fehlinterpretation, durch die Therapie würden 26,3% der Kranken geheilt. Tatsächlich

sind es aber nicht 26,3%, sondern 1% der Kranken, die durch die Therapie geheilt werden.
Der Begriff Heilungschance wird im Bereich der Medizin auch in einem allgemeinen Sinn, nicht im Sinn des statistischen Fachbegriffs, für den möglichen Therapieerfolg verwendet. Insbesondere bei schweren Erkrankungen ist der Vergleich der durchschnittlichen verbleibenden Lebensdauern mit und ohne Therapie eine Methode zur Quantifizierung der Heilungschancen einer Therapie.

4. Die Angabe einer relativen Verbesserung, sei es durch Angabe der Prozentzahl 25%, das Chancenverhältnis 1,263 oder die Prozentzahl 26,3%, ist – isoliert betrachtet – ungeeignet, um den Nutzen einer Therapie zu beurteilen. Hinter einer dieser Prozentzahlen kann sich die Wirksamkeit einer Therapie in einem von 100 oder einem von 10 000 Fällen verbergen.

Dresdner Beiträge zu Quantitativen Verfahren (ISSN 0945-4802)

Ältere Ausgaben (1/94 – 43/04): http://wwqvs.file3.wcms.tu-dresden.de/f-db.htm

44/05 S. Höse, K. Vogl: Modeling and Estimating the Credit Cycle by a Probit-AR(1)-Process.
Erschienen in: *From Data and Information Analysis to Knowledge Engineering,* Hrsg: M. Spiliopoulou, R. Kruse, C. Borgelt, A. Nürnberger, W. Gaul, Springer, Berlin, 2006, S. 534-541.

45/05 S. Höse, K. Vogl: Predicting the Credit Cycle with an Autoregressive Model.

46/06 S. Huschens, A. Karmann, D. Maltritz, K. Vogl: Country Default Probabilities: Assessing and Backtesting.
Erschienen in: *The Journal of Risk Model Validation*, Vol.1, Heft 2, 2007, S. 3-26.

47/08 S. Höse, S. Huschens, R. Wania: Rating Migrations.
Erschienen in: *Applied Quantitative Finance*, Hrsg.: W. K. Härdle, N. Hautsch, L. Overbeck, Springer, Berlin, 2009, S. 105-123.

48/08 S. Höse, S. Huschens: Ausfallrisiko.
Erschienen in: *Praxishandbuch Risikomanagement: Konzepte - Methoden - Umsetzung*, Hrsg: W. Gleißner, F. Romeike, Erich Schmidt Verlag, Berlin 2015, S. 305-324.

49/09 E. Lovász, B. Schipp: The Impact of HIV/AIDS on Economic Growth in Sub-Saharan Africa.
Erschienen in: *South African Journal of Economics*, Vol. 77, Nr. 2, 2009, S. 245-256.

50/09 S. Höse, S. Huschens: Confidence Intervals for Correlations in the Asymptotic Single Risk Factor Model.

51/10 S. Höse, S. Huschens: Confidence Intervals for Quantiles of a Vasicek-distributed Credit Portfolio Loss.

52/10 D. Tillich: Risikomaßzahlen für Kreditportfoliotranchen.
Erschienen in: *AStA Wirtschafts- und Sozialstatistisches Archiv,* Vol. 5, Nr. 1, 2011, S. 59-76.

53/10 S. Huschens: Kann es Rückzahlungswahrscheinlichkeiten von 100% geben?
Erschienen in: *bank und markt – Zeitschrift für Retailbanking*, 39. Jg., Heft 3/2010, S. 11.

54/11 S. Höse, S. Huschens: Confidence Intervals for Asset Correlations in the Asymptotic Single Risk Factor Model.
Erschienen in: *Operations Research Proceedings 2010,* Hrsg: B. Hu, K. Morasch, S. Pickl, M. Siegle, Springer, Berlin, 2011, S. 111-116.

55/11 S. Höse, S. Huschens: Stochastic Orders and Non-Gaussian Risk Factor Models.
Erschienen in: *Review of Managerial Science*. Vol. 7, Nr. 2, 2013, S. 99-140.

56/11 D. Tillich: Bounds for the Expectation of Bounded Random Variables.

57/12 S. Höse, S. Huschens: Credit Portfolio Correlations and Uncertainty.
Erschienen in: *Credit Securitisations and Derivatives – Challenges for the Global Markets,* Hrsg.: D. Rösch, H. Scheule, Wiley: Chichester, 2013, S. 53-70

58/12 S. Fischer: Ratio calculandi periculi - Ein analytischer Ansatz zur Bestimmung der Verlustverteilung eines Kreditportfolios

59/13 D. Tillich, D. Ferger: Estimation of Rating Classes and Default Probabilities in Credit Risk Models with Dependencies.
Erschienen in: *Applied Stochastic Models in Business and Industry.* DOI: 10.1002/asmb.2089

60/14 C. Lehmann, D. Tillich: Consensus Information and Consensus Rating – A Note on Methodological Problems of Rating Aggregation.
Erscheint in: *Operations Research Proceedings 2014,* Springer.

61/15 C. Lehmann, D. Tillich: Applied Consensus Information and Consensus Rating – A Simulation Study on Rating Aggregation.

62/16 C. Lehmann: Modellierung der Abhängigkeitsstruktur von Ausfallkörben – Eine Betrachtung für den Spezialfall des Duo-Baskets.

63/16 S. Huschens: Chance (*odd*) versus Wahrscheinlichkeit (*probability*).